المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (4) 2002
ص ص [97-115]

تمهيد بيز لبعض النماذج الحركية الخطية مع التطبيق

طالب شريف جليل* صفوان ناظم راشد العكـــــاش**

الملخص

التمهيـــد(Smoothing) نـــوع مـــن حـــالات التقـــدير لمعلمـــة أو متغيـــر الحالـــة (State variable) ،ويطلق عليه أيضا في أدبيات الموضوع (data-Smoothing).ففـــي هـــذا البحث قد تم الاهتمام بتمهيد بيز (Bayesian Smoothing) لبعض النماذج الحركيـــة الخطيـــة. وان استخدام أسلوب بيز في التمهيد يعني إعادة النظر في التقـــدير الترشـــيحي (Filtering) فـــي ضوء بيانات جديدة ذلك لتحسين التقدير (Enhancement) وتقليل نسبة الخطأ.إن توظيف بيانـــات جديدة في عملية التقدير هو نوع من الترشيح العكسي (back ward filtering) الحصـــول علـــى تقدير أدق لمعلمات النماذج (او متغير الحالة). وتم تطبيق النتائج النظرية على بيانـــات حقيقيـــة تمثل المعدلات الشهرية لدرجات الحرارة العظمى و الصغرى لمحافظة نينوى.

Bayesian Smoothing Some Dynamic Linear Models

ABSTRACT

Smoothing is a kind of estimation for system parameter (or state variable); it is also known as data – Smoothing. In this work we are concerned with Bayesian Smoothing for some dynamic linear models (DLMs). Using Bayesian approach in dealing with this problem give us access to looking back in the current estimation (or Filtering) in the Light of more new information to enhance the estimation process and minimize the percentage of error.Utilizing observation in estimation is a kind of backward filtering to get more accurate estimate of parameters of models.The theoretical results will be applied to the real data which represent a monthly mean of maximum and minimum temperature of Mosul city.

* استاذ مساعد/ قسم الاحصاء/ كلية علوم الحاسبات و الرياضيات.
** مدرس مساعد/ قسم الاحصاء/ كلية الادارة و الاقتصاد - بحث مستل من رسالة ماجستير

المقـدمـة

يعد موضوع التمهيد من الاجراءات المهمة التي لا يمكن تجاهلها في التطبيقات الأحصائية في مجال الاستدلال وبالاخص في مجال هندسة الاتصالات لما تعطيه مــن دور للاقتــراب مــن الحقيقة من خلال عملية التقدير التي اصبحت من اهم المواضيع في الاحصاء واكثرهــا تطــوراً؛ لانها تمتلك القدرة على التوصل الى صورة أكثر دقة بالنسبة الى القيم التي تتعرض الى الأخطــاء العشوائية حيث برز موضوع تقدير الحالة (State Estimation) أو تقدير المعلمة θ_t التي يمكــن ان تتغير مع الزمن. ويعد التمهيد واحداً من المقدرات التــي بينهــا الباحــث (Kalman, 1960) والتي قسـمها الى ثلاث حــالات تقديرية، إذا تتوفر في ضــوئها بيانــات أو مشاهــدات لغايــة الزمن t ، فاذا كان تقدير θ_s عنــد الزمن s =t تــدعى بالترشــيح (Filtering) ، وعنــد s > t تدعى بالتنبؤ (Prediction) ،وعند s < t تدعى بالتمهيد (Smoothing) . وسوف يهــتم هــذا البحث بالحالة الثالثة عند s < t التي تقدم لنا تسهيلات من خلالها اعادة النظر على القيم المرشــحه في ضوء بيانات جديدة وذلك لتخليصها من الجزء المتبقي من التشويش بالشكل مناســب وحســب كمية المعلومات المتوافره في البيانات الجديدة حيث ان عملية التقدير الترشيحي التي تمثــل الحالــة الاولى في التقدير (ترشيح) التي درسها (الحمداني، 1996) تصبح اساساً لعملية تقدير تمهيــد بيــز في ضوء توفر بيانات او مشاهدات حديثة متعاقبة حسب قيمة h ،كما ان البحثين اللــذين قــدمهما (Blight , 1974)و(Bierman, 1973) يعتبران البداية الاولى لدراسة التقدير الاول لتقليل مــا تبقى من تشويش او ضوضاء في عملية تقدير مرشح كالمن من اجل الحصول علــى قــيم مقــدرة اكثر دقة كما ان قاعدة السلسلة(Chain rule) والخاصــية الماركوفيــة التــي وضــحها الباحــث (Talib S. Jalil , 1996) فضلاً عن اسلوب بيز وتحليله المتسلسل مع استخدام بعــض النمــاذج الحركية الخطية(Dynamic Linear Models) التي قدمها(Harrison and Stevens , 1976) ذات اهمية في عملية التقدير العكسي (back ward).

يرجع تاريخ ظهور التمهيد إلى العشرينات من القرن الماضي ، لتضع بصمتها الأولى فــي نشوء هذه المسألة وتطورها، إذ قدم عدد كبير من الباحثين إسهاماتهم في هذا المجال ليكــون لهــا دور أساسي في تطبيقها في مجالات الحياة المختلفة كافة (صناعية وعلمية) ، حيث قــدم الباحــث (Whittaker, E .T.; 1923) النموذج الأول في عملية التمهيد التعاقبي وفق النموذج الرياضــي ، وقد قدم الباحث (Wiener, N., 1949) أفكاراً وحلولاً حول هذه المسألة في أثناء الحرب العالميــة الثانية فضلاً عن التنبؤ والترشيح الذي أعطى جانباً كبيراً في استخدامه فــي الجانــب التطبيقــي ، وفي عام (1960) قدم (Kalman, R.S.) بحثاً ناقش فيــه أنــواع المقــدرات واســتخدامها فــي

المجالات العلمية والهندسية والإحصائية ، فقد اهتم بتقدير الحالة للمعلمة θ_t ووضع حلولاً جديدة بالنسبة إلى الترشيح والتمهيد والتنبؤ وفق صيغ عامة وشاملة معطياً طرائق أكثر مرونة في العمليات الحسابية وتوصل إلى صيغة تعاقبية (Recursive) والتي لها أهمية في معالجة البيانات عند توفرها أو توفر معلومات جديدة عند أي زمن ، وقد قدم (Glen et. Al ,1969, 1979) بحثين استخدموا فيه التمهيد في حالة التوزيعات المتقطعة باستخدام إحصاء بيز وتم تطبيقه مع استخدام توزيع (Poisson) لإيجاد المقدر لها ، وجرت مناقشة أسلوب التمهيد بطريقة جديدة من قبل الباحثين (Bierman , 1973) و (Blight,1974) مقدمين حلولاً وصيغاً جديدة وشاملة لهذه المسألة التي تمت دراستها في إيجاد المقدرات لكل من الترشيح والتنبؤ والتمهيد ، بالنسبة الى متغير الحالة وقام الباحثان (Jerome, F. and Robert, T., 1984) بتقديم بحث يهتم بتمهيد منحنى العزوم والتي تساعد في التوصل إلى معالجة المنحنيات مستخدماً نموذج الانحدار فضلاً عن استخدام التحويلات التي قدمها (Box and Cox) وفي (1984) قدم الباحثان (Genshiro, K. and Will, G., 1984) بحثاً تناولا فيه تمهيد السلسلة الزمنية ذات الميل (Trend) والحالة الموسمية (Seasonality) وفق النموذج الأولي الذي قدمه (Whittaker) .

مفهوم التمهيد(Smoothing):

إن كلمة التمهيد مقصود بها التنعيم أو الصقل أو التعديل الذي يجري على القيم ذات التعرجات الناتجة من التشويش الموجود أو المتبقي فيها ، وهو نوع من عملية التقدير ، ويعتبر التمهيد أحدى الحالات المهمة في مجال الأستدلال الإحصائي وكذلك في مجالات متعددة في العلوم الأخرى منها هندسة الاتصالات ، حيث برز دورها في عملية المعالجة أو التدقيق من خلال دراسة الظواهر التي تتغير مع الزمن وذلك بأستعادة الماضي (أي يعني أنه عند أية نقطة زمنية يمكن التوقف عندها وإعادة النظر في التقدير وكذلك لتخليصها من أي تشويش خارجي أو تقليله).
في بحثنا تمت دراسة التمهيد من خلال تقدير المعلمة أو إعادة التقدير في ضوء توفر بيانات جديدة ، وهذا يعني أن التمهيد هو نوع من التقدير الاسترجاعي (back ward process) لتوصلنا الى تقدير أدق . في الحقيقة هنالك ثلاثة تقديرات وردت في أدبيات الاستدلال حول الحالة أو المعلمة والتي تكون غير معلومة حيث بينها لأول مرة الباحث (Kalman; 1960) وسميت بقيم التقديرات لـ θ_s والتي هي الترشيح والتنبؤ والتمهيد معتمداً على البيانات المعطاة لحد الزمن t $(y_1, y_2, \ldots, y_t)$ فإذا كانت $s = t$ فتدعى هذه الحالة بالترشيح (Filtering)

أو تقدير المعلمة θ_t في أسلوب بيز يعني إيجاد التوزيع الاحتمالي النهائي $P(\theta_t| y_1,y_2,\ldots, y_t); t=1, 2,\ldots$. أما إذا كانت $s > t$ فتدعى هذه الحالة بالتنبؤ (Prediction) لقيمة المعلمة θ_{t+k} ولإيجاد التوزيع الاحتمالي وفق أسلوب بيز $P(\theta_{t+k}| y_1, y_2, \ldots, y_t) ; k=1, 2, \ldots$ والحالة الأخيرة التي سوف نبني دراستنا عليها عندما $s < t$ فتدعى هذه الحالة بالتمهيد وهي عملية تقدير المعلمة θ_{t-h} وذلك بتوظيف المشاهدات الجديدة في إعادة النظر في التقدير الترشيحي ويعبر عنه كمياً بإيجاد التوزيع الاحتمالي النهائي لـ $P(\theta_{t-h}| y_1, y_2, \ldots, y_t); h=1, 2, 3, \ldots, t-1$ ونحن في هذه الدراسة سوف نستخدم أسلوب بيز مع بعض النماذج الحركية الخطية (Dynamic Linear Model) المقدمة من قبل (Harrison and Stevens;1971,1976) و(Harrison and West; 1989) ، فضلاً عن استنادنا إلى الأبحاث التي استخدمت هذه النماذج ومن هذه الأبحاث البحث الذي قدمه (Gamerman, D. and Miyon, H.; 1993) والذي تطرق فيه إلى مسألة التمهيد مع النماذج الحركية الخطية ، وكذلك البحثان اللذان قدمهما (West Mike; 1985, 1995) معتمداً فيهما على هذه النماذج ودراسة التنبؤ . وسوف تكون انطلاقتنا في البحث في حساب مرشح كالمن وفق القوانين التي بينها الباحث (الحمداني ; 1996) إذ اختص بحثه في دراسة مرشح كالمن والذي يكون حالة أساسية (أولية) لعملية التمهيد ، ولكي نتوصل إلى علاقات تعاقبية (Recursive) في تمهيد بيز لابد من الاعتماد على قاعدة السلسلة (chain rule) المبينة من قبل (Talib S. Jalil; 1999) وبالاعتماد على نظرية بيز و تحليله المتسلسل وفق الخاصية الماركوفية (Markov property) لتكون مفتاحاً أساسياً لتوصلنا إلى الهدف المطلوب ضمن دوال أساسية محددة ويمكن توضيحها بالخاصية التعاقبية لقانون قاعدة السلسلة عند أخذنا لمشاهدات عشوائية ولغاية الزمن t وبالاعتماد على النماذج الحركية الخطية ، يمكن أن نعبر عنها كما يأتي:

$$P(\theta_{t-h}|D_t,\sigma^2)\propto P(y_t|\theta_{t-h},\sigma^2)P(y_{t-1}|\theta_{t-h},\sigma^2)\ldots P(y_{t-h+1}|\theta_{t-h},\sigma^2)P(\theta_{t-h}|D_{t-h},\sigma^2)\ldots(1)$$

حيث أن:

h : عدد صحيح موجب $(h > 0)$ ، وأن $D_t=\{y_t, y_{t-1}, \ldots,y_1\}$ تمثل المشاهدات منذ أول مشاهدة.

ومن خلال الصيغة (1) وبصورتها الشاملة لتحقيق الغاية الأساسية في حساب التمهيد الاسترجاعي(أي تقدير خلفي)وبشكل عام وعلى التوالي من أول مشاهدة مأخوذة في زمن t=1 إلى آخر مشاهدة بشكلها المتعاقب حسب قيمة h وباستخدام أسلوب التحليل المتسلسل في أخذ المشاهدات في كل مرحلة نبدأ بها الخاصة في عملية التقدير ،(أي عملية تعاقبية بعد كل مشاهدة يتم أخذها وفق

قيمة h لأجل إيجاد تمهيد بيز)، أما الترشيح فأنه عملية مستقرة وتعاد بعد أخذ كل مشاهدة في عملية التحليل المتسلسل أو بعد كل عينة تعاد العملية الحسابية الخاصة بالتقدير.

تمهيد بيز Bayesian Smoothing

لقد أطلق اسم الترشيح العكسي على إعادة النظر في التقديرات الماضية في ضوء توفر معلومات جديدة وحسب النقاط الزمنية ليا وبشكل متعاقب لتتم معالجة الاضطرابات التي حدثت سابقاً والأخطاء المتراكمة فيها إذا وجدت، وذلك من خلال تدقيق معلماتها (μ_t) والتأكد من دقة هذه النتائج التي تم الحصول عليها سابقاً (أنظر (Talib S. Jalil; 1996))، ليكن هدفنا هو التطوير والتحسين وبأسلوب جديد معتمدين على توفر معلومات جديدة تساعدنا في عملية تقدير الحالة فضلاً عن استخدام طريقة تمتاز بالشمولية والكفاءة.

يتم الاستناد في إيجاد التمهيد إلى قاعدة السلسلة (chain rule) التي اعتمدت بوصفها أساساً على التوزيع اللاحق للمرشح $P(\theta_t|D_t, \sigma^2)$ والتي يجب الحصول عليها سابقاً حسب نظرية بيز وهذا ما أكدنا عليه بأن التمهيد هو إعادة النظر أو (تعديل) التقدير الترشيحي في ضوء بيانات جديدة وكما ذكرنا سابقاً بأننا سوف نقوم بإيجاد تمهيد بيز لبعض النماذج الحركية الخطية.

وسنبدأ بكتابة النموذج الحركي الخطي العام الموضح في المعادلتين الاتيتين :

معادلة المشاهدة $$y_{t-h+1}=F\theta_{t-h+1}+\upsilon_{t-h+1} \qquad \text{.................................. (2)}$$

معادلة النظام $$\theta_{t-h+1}=G\theta_{t-h}+\omega_{t-h+1} \qquad \text{.................................. (3)}$$

t : الزمن $t=1,2,3,\ldots$

h : دليل التمهيد $h=1,2,3,\ldots,t-1$

مبرهنة (1):

لتكن t زمناً ثابتاً ، وأن ($h > 0$) تمثل تسلسلاً لعملية التمهيد (عدد صحيح موجب)وتأخذ (h=1,2,…,t-1) فإن :

أ ـ التوزيع النهائي في الزمن t-h (State distribution) يكون :

$$(\theta_{t-h}|D_{t-h}, \sigma^2) \sim N(m_{t-h}, \sigma^2 A_{t-h})$$

ب ـ توزيع دالة الترجيح (Likelihood Function distribution) يكون :

$$(y_{t-h+1}|\theta_{t-h}, \sigma^2) \sim N(FG^h\theta_{t-h}, \sigma^2 d(h))$$

حيث أن:

$$d(h)=FG^{h-1}wG'^{h-1}F'+FG^{h-2}wG'^{h-2}F'+\ldots+FGwG'F'+FwF'+1$$

البرهان:

يتم تحديد الكثافة الاحتمالية (أي التوزيع النهائي لمرشح كالمن) والمدة الزمنية التي ستقف عندها عملية الترشيح عند الزمن t ، ثم يتم التعويض عن قيمة $(h=1,2, \ldots, t-1)$ وبشكل متسلسل ومتعاقب في المعادلتين (2) و (3) اللتين سوف تظهران تطور الحالة (The State Evolution Equation) لنحصل على حالة عامة ومتعاقبة أساسية في حل المبرهنة بالاعتماد على المشاهدات أو المعلومات الجديدة المتوفرة لدينا $D_t=\{y_1,y_2,\ldots,y_t\}$ وهي مشاهدات عشوائية مستقلة .

وللوصول الى الشطر الأول انظر الى (الحمداني ، 1996) لكي تحصل على التوزيع النهائي لـ θ_t وفق توفر المعلومات D_t أي أن $D_t=\{y_t, D_{t-1}\}$ عند الزمن t ويمكن التعبير عن التوزيع النهائي باستخدام التوزيع الطبيعي وصفياً على النحو الآتي :

$$(\theta_t \mid Dt , \sigma^2)\sim N(m_t , \sigma^2 A_t)$$

حيث أن:

$$m_t = G\, m_{t-1} + K_t(y_t - F\, G\, m_{t-1})$$
$$\sigma^2 A_t = \sigma^2 [R_t - K_t F R_t] \quad ; \quad K_t = R_t F '(F R_t F' + 1)^{-1}$$

ويطلق على هاتين المعادلتين بمعادلة ترشيح كالمن.

وبذلك يصبح هذا التوزيع أساساً بالنسبة إلى التوزيع التمهيدي ليوصلنا الى مقدر تمهيد بيز عند تعويضنا بقيمة h $(h=1,2,\ldots,t-1)$ وحسب خاصية التمهيد في تقدير الحالة θ_t التي ترجعنا بصورة عكسية إلى الخلف في عملية تقدير المعلمة θ_{t-h} عند الزمن t-h، ولهذا الغرض سوف نعبر عن التوزيع النهائي المذكور أعلاه في زمن t-h كالآتي:

$$(\theta_{t-h} \mid D_{t-h} , \sigma^2) \sim N(m_{t-h} , \sigma^2 A_{t-h}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

الآن يتم تعويض قيمة h وبشكل متعاقب في معادلة النظام (3) والتي من خلالها سوف نحصل على المطلوب الثاني من البرهان كما يأتي :

$$\theta_t = G\, \theta_{t-1}+\omega_t \qquad ; h=1$$
$$\theta_{t-1} = G\, \theta_{t-2}+\omega_{t-1} \qquad ; h=2$$

فإن:

$$\theta_t = G\, [\, G\, \theta_{t-2} + \omega_{t-1}\,] + \omega_t = G^2\, \theta_{t-2} + G\, \omega_{t-1} + \omega_t \qquad ; h=2$$

وإن:

$$\theta_{t-2} = G\, \theta_{t-3} + \omega_{t-2} \qquad ; h=3$$

$$\theta_t = G^2[\,G\,\theta_{t-3} + \omega_{t-2}\,] + G\,\omega_{t-1} + \omega_t$$

$$\theta_t = G^3\,\theta_{t-3} + G^3\,\omega_{t-2} + G\,\omega_{t-1} + \omega_t \qquad ;\ h=3$$

ونستمر بالعملية ولغاية $h = t\text{-}1$

$$\theta_{t-t+1+1} = G\,\theta_{t-t+1} + \omega_{t-t+1+1} \qquad ;\ h= t\text{-}1$$

$$\theta_2 = G\,\theta_1 + \omega_2$$

ومنها نحصل على العلاقة الاتية والتي تربط الماضي θ_1 بالحاضر θ_t .

$$\theta_t = G^h\,\theta_1 + G^{h-1}\,\omega_2 + \ldots + G^2\,\omega_{t-2} + G\,\omega_{t-1} + \omega_t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

وبذلك تصبح العلاقة (5) التي تمثل معادلة النظام بشكل جديد كالآتي :

$$\theta_{t-h+1} = G^h\,\theta_{t-h} + \sum_{j=1}^{h} G^{h-j}\omega_{t-h+j} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

حيث أن $h=1,2,3,\ldots,t\text{-}1$

الآن بالإمكان أن نحصل على توزيع المعلمة وذلك من خـــلال إيجــاد التوقـــع والتغـــاير المشترك (التباين المشترك) الشرطي الذي منه نحصل علـــى المطلـــوب الثـــاني $(y_{t-h+1}|\theta_{t-h}, \sigma^2)$ ومن العلاقة (6) وكما يأتي :

التوقع :

$$E(\theta_{t-h+1}|\theta_{t-h}, \sigma^2) = G^h E(\theta_{t-h}|\theta_{t-h}, \sigma^2) + \sum_{j=1}^{h} G^{h-j} E(\omega_{t-h+j}\,|\,\theta_{t-h}, \sigma^2) = G^h\,\theta_{t-h}$$

التباين :

$$\mathrm{Var}(\theta_{t-h+1}|\theta_{t-h},\sigma^2) = G^h\,\mathrm{Var}(\theta_{t-h}|\theta_{t-h},\sigma^2)G'^h + \sum_{j=1}^{h} G^{h-j}\,\mathbf{Var}(\omega_{t-h+j}\,|\,\theta_{t-h},\sigma^2)\mathbf{G'}^{h-j}$$

$$= 0 + \sum_{j=1}^{h} G^{h-j}\sigma^2 wG'^{h-j}$$

$$= \sigma^2 \sum_{j=1}^{h} G^{h-j} wG'^{h-j} = \sigma^2 W$$

حيث أن:

$$W = \sum_{j=1}^{h} G^{h-j} wG'^{h-j}$$

$$= G^{h-1}\,w\,G'^{h-1} + G^{h-2}\,w\,G'^{h-2} + \ldots + G\,w\,G' + w$$

وأيضا بالأمكان الحصـــول علـــى توزيـــع المشـــاهدات الـــذي يتمثـــل بدالـــة التـــرجيح $P(y_{t-h+1}|\theta_{t-h},\sigma^2)$ من خلال استخدامنا للعلاقة (6) التي سنعتمد عليها في إيجاد التوقـــع والتغـــاير المشترك (التباين المشترك) الشرطي عند تعويضها بمعادلة المشاهدة (2) كـــما يأتي:

التوقع :

$$E(y_{t-h+1}|\theta_{t-h}, \sigma^2) = FE(\theta_{t-h+1}|\theta_{t-h}, \sigma^2)+E(\upsilon_{t-h+1}|\theta_{t-h}, \sigma^2)$$
$$=FE(\theta_{t-h+1}|\theta_{t-h}, \sigma^2)$$

ومن الحالة التي تم إيجادها مسبقا بالنسبة إلى هذا التوقع فإن :

$$E(y_{t-h+1} | \theta_{t-h}, \sigma^2) = F\, G^h \theta_{t-h}$$

التباين:

$$Var(y_{t-h+1}|\theta_{t-h},\sigma^2)= F\, Var(\theta_{t-h+1}|\theta_{t-h},\sigma^2)F' + Var(\upsilon_{t-h+1}|\theta_{t-h},\sigma^2)$$
$$= F[\sum_{j=1}^{h} G^{h-j}\sigma^2 wG'^{h-j}]\, F' +\sigma^2$$
$$=\sigma^2[FG^{h-1}wG'^{h-1}F'+FG^{h-2}wG'^{h-2}F'+\dots+FGwG'F'+wF'+1]=\sigma^2 d(h)$$

ومنه نحصل على توزيع دالة الترجيح $P(y_{t-h+1}|\theta_{t-h},\sigma^2)$ الذي يمكن أن يوصف حسب التوزيع الطبيعي كما يأتي :

$$(y_{t-h+1} | \theta_{t-h},\sigma^2) \sim N(FG^h\theta_{t-h},\sigma^2 d(h)) \quad \dots\dots (7)$$

حيث أن :

$$G^h = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;; \qquad F=[1 \quad 0]$$

ملاحظة: وتتكرر هذه العملية وفق قيمة h وبشكل متعاقب بالنسبة الى المشاهدات.

الآن بعد أن تم إيجاد التوزيع النهائي (4) وكذلك توزيع دالة الترجيح لجميـــع المشـــاهدات الجديدة المعطاة في (7) وباستخدام نظرية بيز وأسلوب التحليل المتسلســـل مـــع قاعـــدة السلســـلة بالإمكان أن نحصل على التوزيع التمهيدي الذي يعبر عنه حسب التوزيع الطبيعـــي وصـــفيا كمـــا يأتي:

$$(\theta_{t-h} | D_t,\sigma^2) \sim N(m_t(-h), \sigma^2 A_t(-h))$$

حيث أن:

$$m_t(-h) = m_{t-h} + A_t(-h) \sum_{j=1}^{h} G'^{h-j+1} F' d^{-1}(j)(y_{t-j+1} - FG^{h-j+1}m_{t-h})$$
$$A_t(-h)=[A^{-1}_{t-h} + d(h)\, B(h)]^{-1}$$

بعد إيجاد هذا التوزيع للنموذج الحركي الخطي العام ، بالإمكان الآن إيجاد التوزيع التمهيدي لبعض النماذج الحركية معتمدين على هذه المبرهنة وقاعدة السلسلة باعتمادا اساسيا .

تمهيد بيز لنموذج التدرج (Step Model):

يمكن التعبير عن النموذج في الزمن t-h+1 وكما يأتي:

$y_{t-h+1}=\mu_{t-h+1}+\varepsilon_{t-h+1}\ ;\ \varepsilon_{t-h+1}\sim N(0,\sigma^2)$ .... (8)

$\mu_{t-h+1}=\mu_{t-h}+\delta\mu_{t-h+1}\ ;\ \delta\mu_{t-h+1}\sim N(0,\sigma^2 r)$ .... (9)

حيث أن:

r : تمثل معامل القياسي وهذا ثابت نفرض له قيمة معلومة .

h : تمثل دليل التمهيد إذ أن h=1, 2, 3, ……, t-1

من المعادلتين (8) و (9) نتبع إجراءات لإيجاد التوزيع النهائي التمهيدي معتمدين على الخواص التي استندنا أليها في العلاقة (1) ونتيجة المبرهنة (1) حيث نبدأ في أول خطوة من عمليتنا بإيجاد التوزيع النهائي للمعلمة μ_t التي تمثل مرشح كالمن انظر (الحمداني ، 1996) حسب نظرية بيز وتحليله المتسلسل عند توفر المعلومات D_t ، ويمكن التعرف على صيغة التوزيع النهائي من خلال التعبير الوصفي لهذا التوزيع وعلى النحو الآتي :

$(\mu_t \mid D_t,\sigma^2)\sim N(m_t,\sigma^2 a_t)$ .... (10)

حيث أن معادلة الترشيح لكالمن تكون:

$$m_t=m_{t-1}+k_t\,(y_t-m_{t-1})\ \ ;\ \sigma^2 a_t=\frac{\sigma^2 r_t}{\sigma^2+\sigma^2 r_t}$$

ومن هذه العلاقة (10) التي تمثل مرشح كالمن لهذا النموذج والذي سيصبح توزيعاً أساسياً للتمهيد ولهذا الغرض نعبر عنه حسب تسلسل قيمة h وكما يأتي:

$(\mu_{t-h}\mid D_{t-h},\sigma^2)\sim N(m_{t-h},\sigma^2 a_{t-h})$ .... (11)

حيث أن:

m_{t-h}, a_{t-h} : ذوات بعد واحد عند الزمن t-h .

ومن هنا نحدد الخطوات المتبعة في تعاقب التوزيع التمهيدي الذي منه يتم التوصول إلى دالة الترجيح وفق قيمة $h > 0$ ، وحسب الاستقراء الرياضي للمشاهدات أو توفر المعلومات لدينا والتي تتمثل بـ$D_t=\{y_1, y_2, \ldots, y_t\}$ حيث تمدد لغاية الزمن النهائي وفق نظرية بيز المستخدمة وقاعدة السلسلة والخاصية الماركوفية المتمثل بالعلاقة (1) والمعروف بالتوزيع الاحتمالي التمهيدي .

بعد إيجاد الاحتمال النهائي في العلاقة (11) نسعى في الحصــول علــى دالــة التــرجيح $P(y_{t-h+1}|\mu_{t-h},\sigma^2)$ التي تتسلسل (تعاقب) مع تغيير قيمة (h) لتكمل عمليتنا فــي إيجــاد التوزيــع التمهيدي وذلك من خلال إدخال التوقع والتباين علــى العلاقــة $(y_{t-h+1}|\mu_{t-h}, \sigma^2)$ ووفــق نمــوذج التدرج لمعادلة المشاهدة (8) ونتيجة المبرهنة (1) وكما يأتي:

التوقع :

$$\begin{aligned}E(y_{t-h+1}|\mu_{t-h}, \sigma^2) &= E(\mu_{t-h+1}+ \varepsilon_{t-h+1} |\mu_{t-h}, \sigma^2)\\ &= E(\mu_{t-h+1}|\mu_{t-h} , \sigma^2)+E(\varepsilon_{t-h+1} |\mu_{t-h}, \sigma^2)\\ &= E(\mu_{t-h+1}|\mu_{t-h} , \sigma^2)\end{aligned}$$

ومن الحالة التعاقبية في العلاقة (6) نحصل على:

$$E(y_{t-h+1}|\mu_{t-h} , \sigma^2) = E(\mu_{t-h}|\mu_{t-h}, \sigma^2)+ \sum_{j=1}^{h} E(\delta\mu_{t-h+1}|\mu_{t-h}, \sigma^2) \;\; = \mu_{t-h}$$

التباين:

$$Var(y_{t-h+1}|\mu_{t-h}, \sigma^2)=Var(\mu_{t-h+1}+\varepsilon_{t-h+1}|\mu_{t-h},\sigma^2)=Var(\mu_{t-h+1}|\mu_{t-h},\sigma^2)+Var(\varepsilon_{t-h+1}|\mu_{t-h},\sigma^2)$$

ومن الحالة التعاقبية في العلاقة (6) نحصل على:

$$\begin{aligned}Var(y_{t-h+1}|\mu_{t-h},\sigma^2)&=Var(\mu_{t-h}|\mu_{t-h},\sigma^2)+\sum_{j=1}^{h} Var(\delta\mu_{t-h+1}|\mu_{t-h},\sigma^2)+Var(\varepsilon_{t-h+1}|\mu_{t-},\sigma^2)\\ &= 0 + \sum_{j=1}^{h} Var(\delta\mu_{t-h+1}|\mu_{t-h},\sigma^2)+Var(\varepsilon_{t-h+1}|\mu_{t-},\sigma^2)\\ &= \sigma^2 r + \sigma^2 r +\ldots+ \sigma^2 r + \sigma^2 = \sigma^2 d(h)\end{aligned}$$

حيث أن :

$$d(h) = r + r +\ldots+ r +1 = h\,r + 1$$

وبذلك يمكن التعبير عنه وصفياً وحسب التوزيع الطبيعي على النحو الآتي:

$$(y_{t-h+1} | \mu_{t-h} ,\sigma^2) \sim N(\mu_{t-h} , \sigma^2 d(h)) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

وبالتعويض عن كل من العلاقتين (11) ، (12) في العلاقة (1) لنحصــل علــى التوزيــع التمهيدي $P(\mu_{t-h}|D_t,\sigma^2)$ بالنسبة الى المعلمة μ_{t-h} التي من خلالها نحصل على مقدر تمهيــد بيــز وكما يأتي:

$$P(\mu_{t-h}|D_t,\sigma^2) \propto e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[\sum_{j=1}^{h} \frac{1}{d(j)}(y_{t-j+1}-\mu_{t-h})^2+\frac{1}{a_{t-h}}(\mu_{t-h}-m_{t-h})^2]}$$

وبالاعتماد على المتطابقة التربيعية الموضحة من قبل (الحمداني ،1996) نحصل على :

$$\sum_{j=1}^{h}\frac{1}{d(j)}(y_{t-j+1}-\mu_{t-h})^2+\frac{1}{a_{t-h}}(\mu_{t-h}-\mu_{t-h})^2=(\frac{1}{d(h)}+\frac{1}{a_{t-h}})(\mu_{t-h}-m_t(-h))^2+\frac{\frac{1}{d(h)a_{t-h}}}{\frac{1}{d(h)}+\frac{1}{a_{t-h}}}\sum_{j=1}^{h}(y_{t-j+1}-m_{t-h})^2$$

منه نحصل على توزيع الاحتمال التمهيدي أي:

$$P(\mu_{t-h}|D_t,\sigma^2)\propto e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\frac{1}{d(h)}+\frac{1}{a_{t-h}})(m_{t-h}-m_t(-h))^2} \quad ......(13)$$

حيث أن:

$$Var(\mu_{t-h}|D_t,\sigma^2)=\sigma^2 a_t(-h) \quad ......(14)$$

$$a_t(-h)=(\frac{1}{d(h)}+\frac{1}{a_{t-h}})^{-1}$$

$$m_t(-h)=m_{t-h}+a_t(-h)\sum_{j=1}^{h}d^{-1}(j)(y_{t-j+1}-m_{t-h}) \quad ......(15)$$

ومن العلاقة (13) ، (14) ، (15) سوف نتوصل إلى التوزيع التمهـــيدي $P(\mu_{t-h}|D_t,\sigma^2)$ لنموذج التدرج وبذلك يمكن التعبير عن التوزيع التمهيدي وصفياً كما يأتي:

$(\mu_{t-h}|D_{t-h},\sigma^2)\sim N(m_{t(-h)},\sigma^2 a_t(-h))$.

يطلق على العلاقة (15) بمقدر تمهيد بيز (Bayesian Smoothing Estimate) بالنسبة إلى المعلمة μ_{t-h} عند الزمن t-h والتي من خلالها ستتم عملية التحسين والتعديل في إعـــادة النظـــر في عملية التقدير وهذا ما يتبين عند مقارنتها مع مرشح كالمن الذي تمـــت دراســـته ســـابقاً وفـــق المشاهدات المتوافرة لدينا.

الجانب التطبيقي (البيانات الحقيقية)

تتضمن دراستنا التطبيقية المعدلات الشهرية لدرجات الحرارة العظمى والصغرى لمحافظة نينوى للمدة المحصورة بين عام 1987 وعام 1996 موضحة في الجدولين (1) و (2) حيث تم اختبار هذه البيانات لغرض الدراسة عليها، فقد تم استخدام احد النماذج الحركية الخطية (لنموذج التدرج) والموضحة صيغته على النحو الاتي:

معادلة المشاهدة $y_t = \mu_t + \varepsilon_t \quad ; \; \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

معادلة النظام $\mu_t = \mu_{t-1} + \delta\mu_t \; ; \; \delta\mu_t \sim N(0, \sigma^2 r)$

أن هدفنا الأساسي هو معالجة البيانات المرشحة أو التي تم تقديرها بواسطة مقدر مرشح كالمن لتخليصها من التشويش الذي قد تحتويه فيها نتيجة أسباب عدة في عملية القياس أو يكون متبقياً فيها بشكل أصح، وان الترشيح الذي سيجري على البيانات الحقيقية عن طريق مقدر مرشح كالمن تمثل الخطوة الاولى في المعالجة معتمدين فيها على البرنامج الموضح في الملحق (1) حيث يتم تقليلها بنسبه من التشويش الذي تحتويه لنبدأ عمليتنا بتقدير تمهيد بيز للبيانات المرشحة من خلال إعادة النظر بعملية التقدير ليتم التدقيق والتعديل على البيانات المقدرة سابقاً (البيانات المرشحة) لتقليل ما متبقٍ من تشويش في عملية الترشيح لتكون البيانات المعالجة اكثر دقة وهذا ما يتبين عند اخذ درجات الحرارة العظمى أولاً ليتم معالجتها حيث نلاحظ في الشكل (1) عملية المقارنة ما بين التمهيد والترشيح ، وكذلك الشكل (2) الذي يوضح المقارنة بين التمهيد والبيانات المشوشة التي تعتبر عملية التمهيد بمثابة الترشيح العكسي في ضوء البيانات الحديثة ويمكن ملاحظة التعديل او المعالجة بشكل واضح في الشكل (4) المأخوذة من الشكل العام (3) الذي يظهر المعالجة ما بين عمليتي تمهيد بيز ومرشح كالمن عند المقارنة فضلاً عن البيانات المشوشة التي تمثل المعدلات الشهرية لدرجات الحرارة العظمى قبل أية معالجة، ويمكن ملاحظة الأشكال (5)، (6)، (7)، (8) التي تبين معالجة المعدلات الشهرية لدرجات الحرارة الصغرى أيضاً.

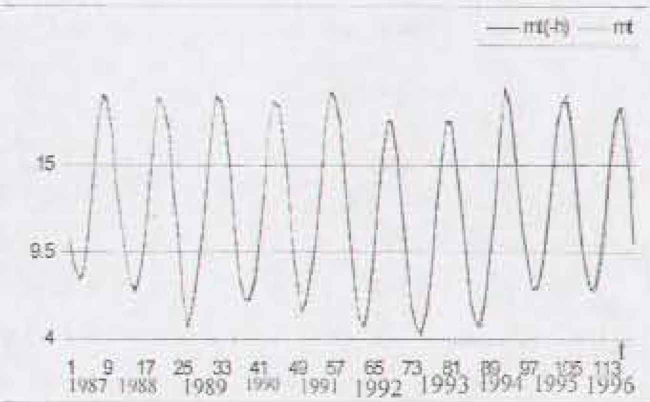
الجدول (1) يوضح معدلات الشهرية لدرجات الحرارة العظمى في محافظة نينوى

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1987	14.5	17.9	15.6	24.8	34.7	40.0	43.5	42.4	38.3	27.0	21.1	12.9
1988	10.5	14.4	16.9	23.3	32.5	37.7	43.2	42.0	37.8	29.2	18.7	14.6
1989	11.2	15.0	20.1	30.0	34.3	38.9	44.3	42.8	37.3	30.4	19.7	12.8
1990	10.7	13.0	20.3	23.4	33.6	39.7	43.8	41.9	38.3	31.2	24.4	15.9
1991	13.1	14.2	18.6	26.4	31.5	40.1	42.9	42.5	38.1	30.4	23.5	12.4
1992	8.3	9.7	16.0	23.6	29.0	37.0	41.2	42.1	37.1	31.6	19.0	11.1
1993	11.4	13.1	18.0	23.1	27.9	37.9	43.2	42.3	38.5	30.5	17.7	15.1
1994	14.9	14.7	19.5	27.1	33.8	39.6	42.9	42.3	39.3	30.6	19.0	10.6
1995	13.6	16.5	20.2	23.7	33.9	37.4	41.6	41.3	37.4	30.3	20.5	15.3
1996	13.1	16.8	17.7	23.3	34.5	38.6	44.8	43.0	37.0	29.8	23.5	16.4

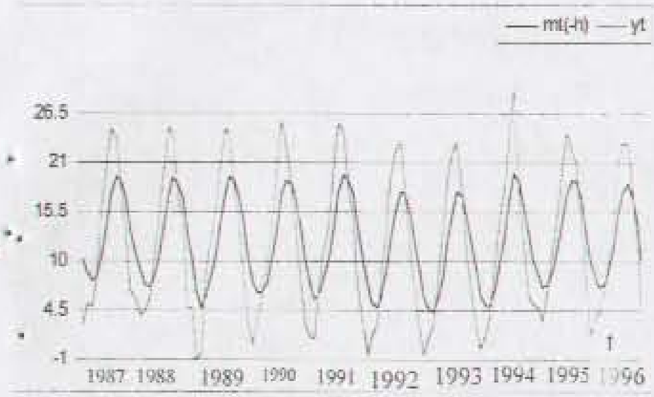
الجـــدول (2) يوضح معدلات الشهرية لدرجات الحرارة الصغرى في محافظة نينوى

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1987	2.9	3.2	5.0	8.5	16.3	21.6	24.8	23.6	18.6	13.1	6.7	6.1
1988	4.0	4.3	5.9	10.0	14.8	19.7	25.0	24.3	17.5	14.6	4.9	4.7
1989	-1.0	-0.3	8.6	12.2	16.1	20.5	24.8	24.1	18.5	14.4	8.7	3.3
1990	0.7	3.6	6.4	9.8	14.4	20.0	25.8	23.0	18.5	13.4	7.8	3.0
1991	1.5	1.4	7.7	11.3	14.4	21.8	25.0	24.5	18.4	14.8	7.5	3.4
1992	-0.5	1.6	2.9	8.2	14.2	19.4	22.4	23.3	17.7	11.2	6.7	2.5
1993	0.2	2.0	3.8	10.2	14.3	18.2	23.3	29.5	17.1	12.2	6.1	5.2
1994	4.9	3.3	7.0	12.0	15.0	20.8	24.3	22.3	20.8	14.7	9.3	1.7
1995	3.5	4.3	6.7	10.3	15.5	20.7	23.2	23.0	18.4	11.8	5.3	0.2
1996	3.0	5.2	7.8	10.3	17.0	19.1	25.7	23.8	19.0	12.3	6.7	7.2

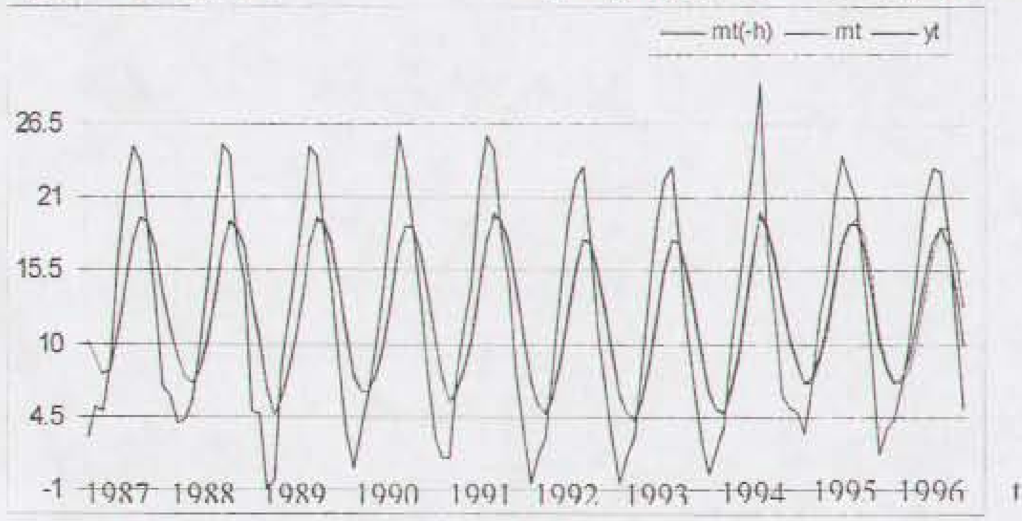
أشكال توضح المعالجة بالنسبة إلى المعدلات الشهرية لدرجات الحرارة العظمى في لمحافظة نينوى.



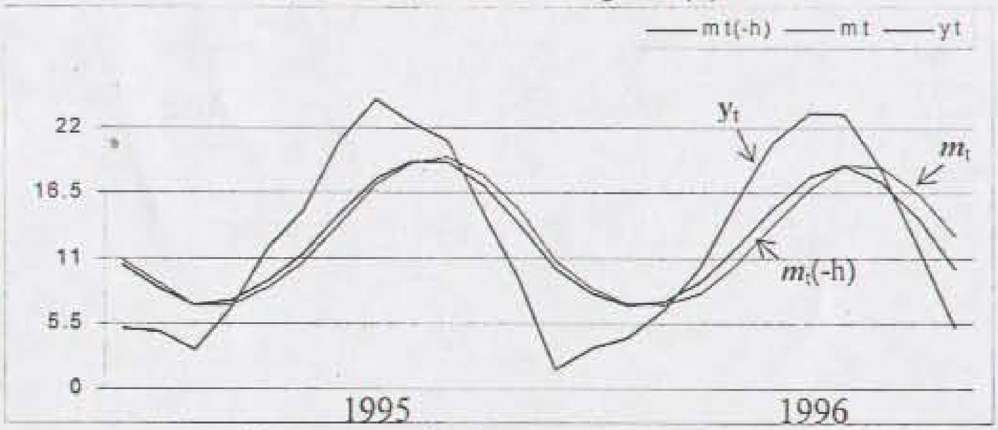
الشكل (1) يوضح المقارنة بينm_t , $m_t(-h)$



الشكل (2) يوضح الترشيح العكسي للبيانات

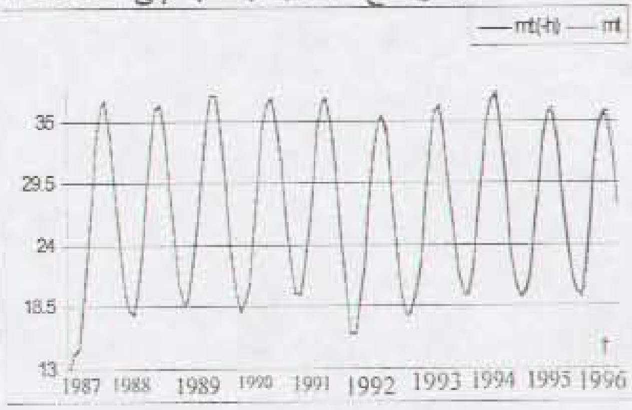


الشكل (3) يوضح المقارنة بين $m_t(-h)$, m_t ,y_t



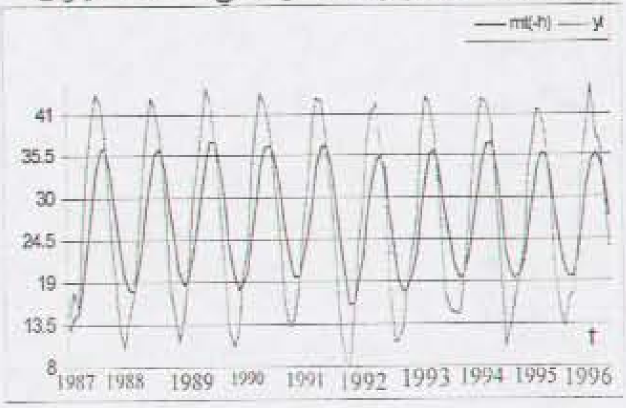
الشكل (4) يوضح المقطع المأخوذة من الشكل (3)

أشكال توضح المعالجة بالنسبة إلى المعدلات الشهرية لدرجات الحرارة الصغرى في لمحافظة نينوى.



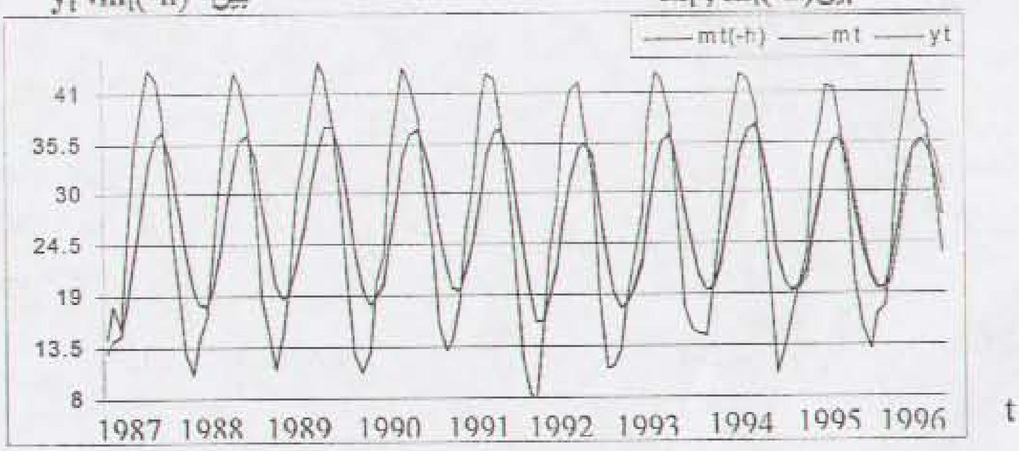
الشكل (5) يوضح المقارنة

بين $m_t , m_t(-h)$

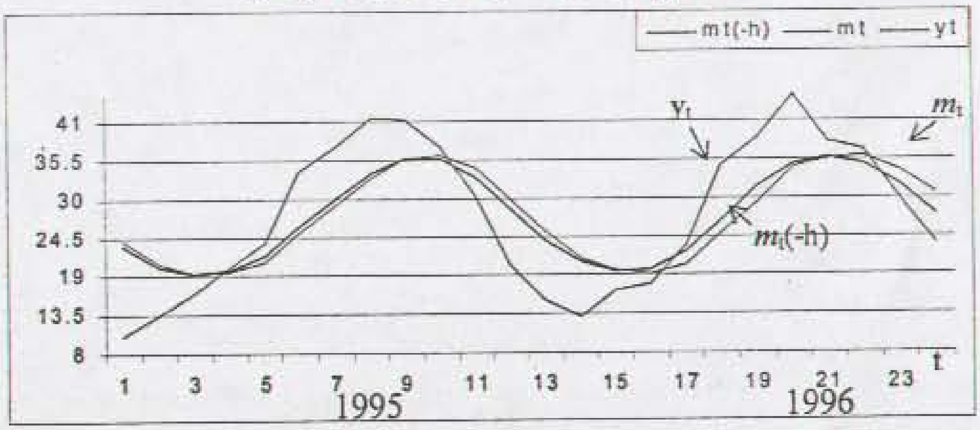


الشكل (6) يوضح المقارنة

بين $m_t(-h)$، y_t



الشكل (7) يوضح المقارنة بين $m_t(-h), m_t ,y_t$



(8) يوضح المقطع المأخوذة من الشكل (7)

يتبين من الاشكال الموضحة أنفاً المحصلة النهائية للمعدلات الشهرية لدرجات الحرارة العظمى والصغرى التي تظهر القراءة الدقيقة النهائية أو الأقرب الى الدقة التي تم التوصل أليها من خلال تقدير تمهيد بيز $m_t(-h)$ وفق النموذج المأخوذ في المعالجة معتمدين على مرشح كالمن أي عملية التقدير الترشيحي m_t ومنه نستنتج الى ان عملية التمهيد هي العملية العكسية للترشيح والتي تجري على البيانات مرتين او مرحلتين متعاقبتين لتوصلنا الى تقدير أدق وذلك بالاعتماد على مشاهدات او بيانات جديدة أي قراءة جديدة تساعدنا في عملية المعالجة لكي تساعدنا للتخلص من الاخطاء التي تظهر فيها نتيجة اسباب عدة لنحصل على قراءة أكثر دقة عما هو عليه مسبقاً .

أولاً: المصادر العربية

1. أبو ناقوس، أحمد حسن عليان ، (1993) ، "**إستخدام إحصاء بيز على النماذج الديناميكية الخطية مع تصميم لوحة بيز**" ، رسالة ماجستير ، كلية الإدارة والاقتصاد ، جامعة الموصل.
2. الحمداني ، مهند سعد الله ،(1996) ، "**مرشح كالمن لبعض النماذج الحركية الخطية مع المحاكاة**" ، رسالة ماجستير ، كلية الإدارة والاقتصاد ، جامعة الموصل.
3. الرسام ، ريا سالم محمد ،(1996) ، "**تكوين لوحة بيز ثنائية البعد لغرض مراقبة جودة الانتاج مع المحاكاة**"، رسالة ماجستير، كلية الادارة والاقتصاد، جامعة الموصل.

ثانياً: المصادر الأجنبية

4. Barnett, V., (1982), "**Comparative Statistical Inference**". John Wiley & Sons, New York.
5. Bierman, G.J., (1963), "**Fixed – Interval Smoothing with Discrete Measurement**", Int.J. Control, Vol.(18), No.(1). pp.65-72.
6. _________,(1973),"**Sequential Square Root Filtering and Smoothing of Discrete Linear System**", Automatic, No.(10),pp,147-158.
7. Blight, B.J.N., (1974) "**Recursive Solutions for the Estimation of Stochastic**", JASA, Vol. (69), No. (346), pp. 477-481.
8. Box, G.E. and Tiao, G.C., (1973), "**Bayesian Inference In Statistical Analysis**". Addison–Wesley Publishing company, Californial, London.

9. DeGroot, A.J., (1970), "**Optimal Statistical Decision**", Mcgrew Hill, New York.
10. Fahady, K.S. and Shamoon, P.J., (1990), "**Probability**", Ministry of Higher Education and Scientific Research, University of Mosul press.
11. Gamerman, D. and Migon, H.S., (1993), "**Dynamic Hierarchial Models**", JRSSB, Vol. (55), No. (3), pp. 629-642.
12. Genshiro, K. and Will, G., (1984), "**A Smoothness Priors – State Space Modeling of Time Series with Trend and Seasonality**", Journal of the American statist. Assoctation, Vol. (79), No. (386), pp. 378-388.
13. Glen, N. et. al., (1969), "**An empirical Bayes Smoothing technique**", Biometrika, Vol. (56), No. (2), pp. 361-364.
14. ________, (1972), "**Acontinous empirical Bayes Smoothing technique**", Biometrika, Vol. (59), No. (2), pp. 361-368.
15. Harrison, P.J. and Stevens, S.T., (1971), "**A Bayesian Approach Short – term Forecasting**", Operation Research Quarterly, Vol. (22), No. (2), pp. 341-362.
16. ________, (1976), "**Bayesian Forecasting With Discussing**", JRSSB, Vol. (38), No. (48), pp. 205-246.
17. Harrison, P.J. and West, M., (1989), "**Bayesian Forecasting and Dynamic Models**", Springer – Verlag, New York.
18. Kalman, R.S., (1960), "**A New Approach to linear Filtering and prediction problems**", Trans. J. and Basic. Eng. Series D., Vol. (82), pp. 35-45.
19. Kanjilal, P.P., (1995), "**Adaptive prediction and predictive control**", peter pereyrinus Ltd. U.K.
20. Jefferys, H., (1961), "**Theory of Probability**", Clarenden press, Oxford, London.
21. J. Susan. Milton and Chris P. Tsokos, (1976), "**Probability theory with the Essentical Analysis**", Addison – Wesley pubishing compong, London.
22. Jerome, F. and Robert, T., (1984), "**The Monotone Smoothing of Scatterplots**", Technometrics,Vol.(26),No.(3),pp. 243-250.
23. Lindgren, B.W., (1962), "**Statistical theory**", Collier Macmillan, New York.
24. Magbeck, P.S., (1979), "**Stochostic Models Estimation and control**", Mathematics in science and Eng., Vol. (141), Academic press Inc.
25. Mood, M. and Graybill, A. and Boes., (1971), "**Introduction to theory of Statistical**", McGraw Hill Book, New York.

26. Raiffa, H. and Schlaifer, R., (1961), "**Application Statistical Decision theory**", Division of Research, Harvard Business School, Boston.
27. Robert V., Hogg and Ellioth, Tanis, (1988), "**Probability and Statistical Inference**", New York, London.
28. R. A. Moyeed, (1995), "**Spline Smoother As A Dynamic linear Model**", Ausstral. J. statist., Vol. (37), No. (2), pp. 193-204.
29. Ronald, E.H., et. al., (1996), "**One – step Fixed – lag Smoothers for Morkovian Switching systems**", IEEE. Transactions on Automatic control, Vol. (41), No. (7), pp. 1051-1056.
30. Schmitt, S.A., (1969), "**Measuring Uncertainty An Elementary Introduction to Bayesian Statistical**", Addition – Wesley company Inc., London.
31. Smith, A.F. et. al., (1982), "**Monitoring Kidney Transplants patients**", the Statistion, Vol. (32), pp. 46-54.
32. Talib S., Jalil, (1996), "**Bayesian Smoothing with simulation**", Dirasat Natural and Eng. Sciences, Vol. (24), No. (1), pp. 73-87.
33. ________ ,(1988), "**Sequential Inspection & Intervention policy for a Manufacturing process**", Unpublished Ph. D. thesis, Dept. of Mathematics, Wales University.
34. Wald, A., (1947), "**Sequential Analysis**", Wiley & sons. Inc., New York.
35. West, M., Harrison, P.J. and Hellos, M., (1985), "**Dynamic Gemeralized linear Models and Bayesian Forecasting**", J. of the Anerlcan statist. Association, Vol. (80), No. (389), pp. 73-83.
36. West, M., (1995), "**Bayesian Inference in Cyclical component Dynamic linear Models**", J. of the Anerican Statist. Assiation December, Vol. (40), No. (432), pp. 1301-1312.
37. Whittaker, E. T. (1923), "**On a new method of graduation**", Proc. Of the Edingboriugh Mathematical Soc. No. (41) PP.63-75.
38. Wiener, N. (1949), "**The Extrpolation, Interplation and Smoothing of Stationary Time series**", John Wiley & sonc., New York.
39. Zacks, S., (1970), "**Theory of Statistical Inference**", New York, London.

الملحق (1)

```
DEF FNF(x)=FIX(x*1000000)/1000000
DEF FNNORMAL(MU,SS)
EXIT DEF: END DEF: Z =
DIM v(Z), w(Z), u(Z), y(Z), r(Z), k(Z), c(Z), m(Z)
DIM SS(Z), SSE(Z), SE(Z), SA(Z), SM(Z)
u(0) = 10: m(0) = 10: c(0)=0.15
READ v, w , y(t)
FOR t = 1 TO Z
A= (-1) ^ t
IF A = -1 THEN v =   ELSE v =
IF t > 15 AND t < 29 THEN v =
IF t > 30 AND t < 51 THEN v =
Q = v * w
10 v(t)=FNF(FNNORMAL(0,v)):w(t)=FNF(FNNORMAL(0,Q))
u(t)=FNF(u(t-1)+w(t)):y(t)=FNF(u(t)+v(t))
r(t)=FNF(w+c(t-1))
k(t)=FNF(r(t)/(r(t)+1))
c(t)=FNF(r(t)-r(t)*k(t))
m(t)=FNF(m(t-1)+k(t)*(y(t)-m(t-1)))
L = t
NEXT t
PRINT TAB(20);"v=";v; TAB(40);"w=";w;TAB(60);"a(0)=";c(0)
PRINT TAB(46);"Pos.Mean";TAB(58);"Pos.Var.";TAB(70);"Filter G."
PRINT TAB(3);"t";TAB(10);"yt";TAB(22);"mt";TAB(31);"a(t)"
PRINT TAB(3);"-";TAB(10);"------";TAB(22);"------";TAB(31);"------";
FOR t = 1 TO L
80 PRINT TAB(2);t;TAB(10);y(t);TAB(22);m(t);TAB(33);c(t)
NEXT t
            ************FILTERING****************
PRINT TAB(1);"h";TAB(6);"mt(-h)";TAB(20);"at(-h)";TAB(32);"eL(-h)"
PRINT TAB(1);"-";TAB(6);"------";TAB(20);"-------"; TAB(32);"------"
P = L
FOR H = 1 TO L - 1
SS(1) = 0
FOR j = 1 TO H
SS(j)=FNF(SS(j)+(j*w+1)^-1*(y(P-j+1)-m(P-H)))
SE(H)=y(P-j+1)-m(P-H)
IF j=H THEN SSE(H)=SS(j)
NEXT j
SA(H)=(c(P-H)^-1+(H*w+1)^-1)^-1
SM(H)=m(P-H)+SA(H)*SSE(H)
PRINT TAB(1);H;TAB(7);SM(H);TAB(23);SA(H);TAB(33);SE(H)
NEXT H
     **************SMOOTHING****************
DATA *,* ,*
END
```